ANALIZA FUNKCJONALNA
LISTA 3

1. Dobierając odpowiedni ciąg funkcji (f_n) ciągłych na $[0,1]$, pokazać, że zbieżność w normie L^1, czyli
$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|dx \to 0$$
nie implikuje zbieżności w normie L^∞, czyli że nie musi zachodzić
$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \to 0.$$

2. Dobierając odpowiedni ciąg funkcji (f_n) z przestrzeni $L^1[0,1]$, pokazać, ze zbieżność punktowa, czyli $f_n(x) \to f(x)$ dla każdego ustalonego x, nie implikuje zbieżności w normie L^1, czyli, że nie musi zachodzić $\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|dx \to 0$.

3. Pokazać, że jeżeli dla ciągu funkcji (f_n) ciągłych na $[0,1]$ zachodzi zbieżność w normie supremum, tzn. $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \to 0$, to zachodzi również ich zbieżność w normie L^1, tzn $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

4. Mierzalna funkcja rzeczwista lub zespolona f na przestrzeni miarowej (X,μ) nazywa się *istotnie ograniczona* jezeli istnieje skończona stała c, taka że $|f(x)| \le c$ prawie wszędzie na X. Oznaczamy przez
$$\text{ess sup}|f| \quad \text{lub} \quad \text{ess sup}_{x\in X}|f(x)|$$
infimum zbioru takich stałych c. Pokazać, że przestrzeń $L^\infty(X,\mu)$ funkcji istotnie ograniczonych na zbiorze X z normą
$$\|f\|_\infty = \text{ess}\,\text{sup}_{x\in X}|f(x)|,$$
gdzie identyfikujemy funkcje różniące się na zbiorze miary zero, jest przestrzenią zupełną. Można przyjąć, że X jest podzbiorem prostej $\mathbb{R}$ i μ jest miarą Lebesgue'a.

5. Pokazać, że $l^1 \subset l^2$ i że ta inkluzja jest właściwa, tzn. $l^2 \neq l^1$. Uogólnić ten fakt i pokazać, że jeżeli $1 \le p < q \le \infty$, to $l^p \subset l^q$ oraz że ta inkluzja jest właściwa.

6. Pokazać, że $L^2[a,b] \subset L^1[a,b]$ i że ta inkluzja jest właściwa. Uogólnić ten fakt i pokazać, że $L^q[a,b] \subset L^p[a,b]$ jeżeli $1 \le p < q \le \infty$ i że ta inkluzja jest właściwa.

7. Pokazać, że dla przestrzeni $X_p = L^p(\mathbb{R})$ oraz $X_q = L^q(\mathbb{R})$, gdzie $1 \le p < q \le \infty$, nie jest prawdą ani inkluzja $X_p \subset X_q$ ani $X_q \subset X_p$.

8. Niech Y będzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej X. Sprawdzić, że zbiór X/Y złożony z tzw. *warstw* oznaczanych $x + Y = \{x + y : y \in Y\}$ z operacjami
$$(x_1 + Y) + (x_2 + Y) = (x_1 + x_2) + Y, \quad \alpha(x + Y) = \alpha x + Y$$
jest przestrzenią liniową (tzw. *przestrzenią ilorazową*)

9. Pokazać, że jeżeli przestrzeń X jest unormowana i podprzestrzeń Y jest domknięta, to przestrzeń ilorazowa X/Y jest unormowana z normą

$$\|x+Y\| = \inf_{y\in Y} \|x+y\|$$

10. Pokazać, że jeżeli X jest przestrzenią Banacha i Y jest podprzestrzenią domkniętą, to X/Y jest przestrzenią Banacha. Podać przykład takich X i Y.

R. Lenczewski